فصل سوم

استدلال و اثبات در هندسه

استدلال

هر انسانِ منطقی و باهوشی برای انجام کارها و رفتارهای خود دلیل دارد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

کار	دلیل
غذا خوردن	← گرفتن انرژی و جذب موادّ موردنیاز بدن
خوابیدن	← رفع خستگی
ورزش	← کسب سلامتی و ورزیده شدن جسم
مطالعه	← کسب علم و دانش و درک بهتر از مسائل

به این کار، یعنی بیان کردن دلیل انجام فعالیت‌ها یا دلیل آوردن برای گفته‌هایمان، استدلال می‌گوییم. البته دلیل‌هایی که برای انجام کارهایمان می‌آوریم باید منطقی باشد. به مثال زیر دقت کنید.

معلمی از دو نفر از دانش‌آموزان خود می‌پرسد که چرا معمولاً انتهای اسفندماه بهترین زمان برای درخت‌کاری است؟ به پاسخ‌های دو نفر از دانش‌آموزان دقت کنید.

نیما: معمولاً در انتهای اسفندماه، ما ایرانیان مشغول خانه تکانی و زیباسازی محیط خانه و زندگی خود می‌شویم. کاشتن درخت به زیباتر کردن محیط کمک می‌کند. پس این زمان بهترین زمان برای کاشت درخت است.

داریوش: تا جایی که من می‌دانم، انتهای زمستان هنوز درختان در خواب زمستانی هستند و کم‌کم زمان بیداری و سبز شدن آن‌ها فرا می‌رسد. بنابراین در زمانی‌که هنوز درخت از خواب زمستانی بیدار نشده است، باید کاشته شود تا قبل از بیداری، ریشه‌های آن در خاک و محیط جدید قرار گرفته باشند و محکم شده باشند.

مشاهده می‌کنید که هر دو نفر، دلیل‌هایی را بیان کرده‌اند. اما دلیل‌هایی که نیما آورده است، چندان منطقی به‌نظر نمی‌رسند، چرا که انسان‌ها در هر موقع از سال می‌توانند محیط خانه را تمیز کنند. پس در همهٔ زمان‌ها می‌توان درخت کاشت.

حتماً شما هم شنیده‌اید که دلیلی که بسیاری از مردم کشور ما در روز ۱۳ فروردین از خانه بیرون می‌روند، این است که آن‌ها اعتقاد دارند ۱۳ یک عدد نامبارک و نحس است. از نظر یک انسان منطقی چنین استدلال‌هایی به هیچ عنوان قابل قبول نیست.

روش‌های استدلال کردن

برای آوردن دلیل‌های منطقی و استدلال کردن، روش‌های مختلفی وجود دارد، اما هر روش باید در جای خود و در مسئله‌های مربوط به خود مورد استفاده قرار گیرد. در اینجا با برخی از روش‌هایی که برای استدلال می‌توان استفاده کرد، آشنا می‌شویم:

الف) استفاده از اطلاعات و رابطه‌هایی که قبلاً آن‌ها را اثبات کرده‌ایم و درستی آن‌ها ثابت شده است.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر ضلع مربعی و قطر یک دایره برابر ۱۰ باشد، مساحت مربع بیش‌تر است. برای حلّ این مسئله می‌توانیم از رابطه‌هایی که قبلاً برای مساحت مربع و دایره آموخته‌ایم، استفاده کنیم:

مساحت مربع = ضلع × ضلع

مساحت دایره = شعاع × شعاع × π

مساحت مربع = ۱۰×۱۰ = ۱۰۰ ، (شعاع = ۵) مساحت دایره = ۵×۵×۳/۱۴ = ۷۸/۵

مشاهده می‌کنید با استفاده از رابطه‌هایی که قبلاً آموخته بودیم، با دلیل و مدرک ثابت کردیم که مساحت مربع از دایره بیش‌تر شده است.

ب) کنار هم قرار دادن اطلاعاتی که مسئله در اختیار ما قرار می‌دهد.

مثلاً فرض کنید یک مسئله به‌صورت زیر بیان شده است، از این گفته چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«جرم علی از جرم محمد بیش‌تر است. جرم رضا از جرم محمد کم‌تر است.»

پاسخ: اگر دقت کنید چون علی از محمد سنگین‌تر است و محمد نیز از رضا سنگین‌تر است، پس نتیجه می‌گیریم که علی از رضا هم سنگین‌تر است. مشاهده می‌کنید که در این سؤال، ما از اطلاعات قبلی خودمان استفاده‌ای نکردیم، بلکه با کنار هم قرار دادن اطلاعات مسئله و مقایسه‌هایی که انجام دادیم، توانستیم نتیجه‌گیری کنیم.

مثال ۱ به جملهٔ زیر دقت کنید و بگویید نتیجه‌گیری کدام فرد صحیح است؟

«باسیل‌ها میکروب هستند و بعضی از باسیل‌ها بیماری‌زا هستند.»

علی: همهٔ میکروب‌ها بیماری‌زا هستند. **داریوش: هیچ میکروبی بیماری‌زا نیست.**

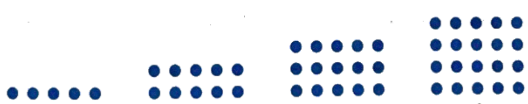
رضا: بعضی از میکروب‌ها، بیماری‌زا هستند. **حامد: هیچ میکروب بیماری‌زایی، باسیل نیست.**

با توجه به اطلاعات خود مسئله که می‌گوید برخی از باسیل‌ها بیماری‌زا هستند، می‌توان نتیجه گرفت که برخی از باسیل‌ها هم بیماری‌زا نیستند و از آن‌جا که خود مسئله می‌گوید باسیل‌ها میکروب هستند، یعنی بعضی از میکروب‌ها بیماری‌زا هستند و برخی بیماری‌زا نیستند. یعنی با این حساب، نتیجه‌گیری رضا صحیح است.

الگویابی

گاهی با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد یا شکل‌ها است، می‌توان پاسخی برای سؤالات پیدا کرد.

مثال ۲ علی شکل‌های زیر را روی تخته رسم کرد و گفت اگر شکل‌ها را به همین صورت ادامه دهیم، در شکل بیستم، ۱۰۰ دایرهٔ کوچک خواهیم داشت. لطفاً هر کسی دلیلی برای درست بودن این عدد، بیان کند. اکنون به استدلال‌هایی که دانش‌آموزان ارائه کرده‌اند، دقت کنید.



(۱) (۲) (۳) (۴)

کیارش: چون عدد ۱۰۰ بر ۲۰ بخش‌پذیر است. مرتضی: چون عدد ۱۰۰ از ۲۰ بزرگ‌تر است.

آرین: چون شما (علی) قبلاً این سؤال را حل کرده‌اید.

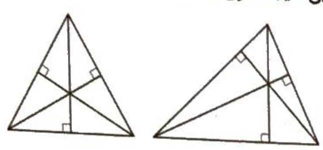
آرمین: چون شما گفتید که «به همین صورت شکل‌ها را ادامه می‌دهیم» و تا اینجا شکل اوّل ۵ دایره دارد و در شکل‌های بعدی ۵ تا ۵ تا، به تعداد دایره‌ها اضافه شده است و شکل اوّل ۵×۱، شکل دوم ۵×۲، شکل سوم ۵×۳ دایره دارد، پس شکل بیستم، ۱۰۰ = ۵×۲۰ دایره خواهد داشت.

مشاهده می‌کنید که آرمین با دلیل منطقی (یعنی رابطهٔ درستی که در شکل‌ها پیدا کرده است) پاسخ این سؤال را داد. درحالی‌که سایر دانش‌آموزان دلایل منطقی ارائه نکرده‌اند.

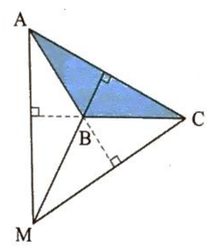
نکته

با استفاده از چند مثال، نمی‌توان یک موضوع را اثبات کرد.

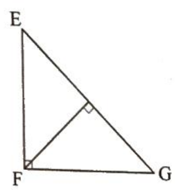
مثال ۳ **فرض کنید فردی مثلث‌های مقابل را کشیده باشد و در هر کدام سه ارتفاع مثلث را رسم کرده باشد، او سپس این نتیجه را می‌گیرد: «در همهٔ مثلث‌ها، سه ارتفاع، در یک نقطه درون مثلث هم‌دیگر را قطع می‌کنند.» آیا این نتیجه‌گیری او درست است؟**



خیر. گرچه در مثال‌هایی که این فرد زده است، همهٔ ارتفاع‌ها، در یک نقطه درون مثلث هم‌دیگر را قطع کرده‌اند، اما او همهٔ حالت‌های ممکن را بررسی نکرده است. مثال‌های زیر، نادرستی نتیجه‌گیری او را نشان می‌دهند.



ارتفاع‌های مثلث ABC ، هم‌دیگر را در نقطهٔ M ، در خارج از مثلث قطع کرده‌اند.



ارتفاع‌های مثلث EFG ، در نقطهٔ F به هم رسیده‌اند و نقطهٔ F ، رأس خود مثلث است.

با توجه به مثال بالا، می‌توان نتیجه گرفت اگر موضوعی در یک یا دو مورد جواب داد، تا زمانی‌که به‌طور علمی ثابت نشده است، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که در همه‌جا، آن موضوع درست است.

نکته

همان‌طور که گفتیم، برای اثبات یک موضوع، نمی‌توانیم از مثال استفاده کنیم. اما اگر بخواهیم یک موضوع را رد کنیم، می‌توانیم از مثال استفاده کنیم، به این مثال، «مثال نقض» می‌گویند.

مثلاً فرض کنید فردی ادعا کند که اگر عددی را به‌توان ۴ برسانیم، حاصل بزرگ‌تر از خود عدد می‌شود و مثال‌های زیر را بیاورد.

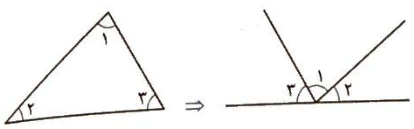
$2^4 = 16 \Leftrightarrow (2 < 16)$ ، $5^4 = 625 \Leftrightarrow (5 < 625)$ ، $(-3)^4 = 81 \Leftrightarrow (-3 < 81)$

اما ما با یک مثال می‌توانیم ثابت کنیم که حرف او اشتباه است. $(0/1)^4 = 0/0001 \Rightarrow (0/1 > 0/0001)$. (عدد ۰/۱ را به‌توان ۴ رساندیم و حاصل ۰/۰۰۰۱ شد که از خود عدد کوچک‌تر است.) به این مثال، مثال نقض گفته می‌شود.

رسم شکل برای استدلال

برخی اوقات برای اثبات قضیه‌ها، از رسم شکل استفاده می‌کنیم. اما واقعیت این است که اثبات با استفاده از رسم شکل، همیشه قابل اعتماد نیست و اثبات‌ها در ریاضی باید بر پایهٔ دلیل‌های منطقی و درست باشند. با این حال اثبات از طریق رسم شکل که به آن روش شهودی می‌گویند، همیشه به ما دید بهتری می‌دهند و کمک می‌کنند ما درک بهتری از مسائل پیدا کنیم.

به‌عنوان مثال فردی می‌خواهد با استفاده از شکل، ثابت کند جمع زاویه‌های یک مثلث، ۱۸۰° است. او ابتدا یک مثلث رسم می‌کند، سپس سه زاویه به‌اندازهٔ زاویه‌های این مثلث در کنار هم رسم می‌کند و مشاهده می‌کند سه زاویهٔ کنار هم، یک زاویهٔ نیم‌صفحه (۱۸۰°) ساخته‌اند.



این اثبات، گرچه به ما درک خوبی از مسئله می‌دهد، اما به‌عنوان یک اثبات علمی، قابل قبول نیست. کمی جلوتر، همین موضوع را به روش علمی اثبات می‌کنیم.

چند نتیجه از استدلال

به شکل‌های مقابل و تساوی‌های نوشته‌شده از روی آن‌ها دقت کنید.

۱ کیلوگرم = جرم سیب‌ها

۱ کیلوگرم = جرم پرتقال‌ها

در این تساوی هم جرم سیب‌ها و هم جرم پرتقال‌ها برابر با یک کیلوگرم است. پس می‌توان نتیجه گرفت که جرم سیب‌ها و جرم پرتقال‌ها برابر است. به‌طور کلی: «هرگاه در دو تساوی، سمت راست تساوی‌ها برابر باشند، نتیجه می‌گیریم سمت چپ تساوی‌ها نیز برابرند.»

$$\left.\begin{matrix} A = B \\ C = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = C$$

به تساوی‌های زیر دقت کنید.

$۵۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰ +$ پول داریوش

$۵۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰ +$ پول علی

با توجه به این تساوی‌ها، می‌توان گفت پول داریوش و علی هر کدام ۴۰۰۰۰ تومان است و با هم برابر است. از طرفی در این تساوی‌ها هم چون سمت راست تساوی‌ها برابر است، پس می‌توان نتیجه گرفت سمت چپ تساوی‌ها نیز برابر است.

$۱۰۰۰۰ +$ پول داریوش $= ۱۰۰۰۰ +$ پول علی

اما در هر دو طرف تساوی، پول داریوش و علی با ۱۰۰۰۰ جمع شده است. بنابراین می‌توان گفت پول علی و پول داریوش برابرند. به‌طور کلی: «هرگاه در دو طرف یک تساوی، مقدارهای مساوی وجود داشته باشد، می‌توانیم آن‌ها را حذف کنیم.»

$$\cancel{A} + B = \cancel{A} + C \Rightarrow B = C$$

مثال ۴ **با استفاده از استدلال، نشان دهید اگر $A + E = M$ و $A + K = M$ باشد، $E = K$ است.**

چون در هر دو تساوی، سمت راست تساوی‌ها برابر با M است، پس سمت چپ تساوی‌ها برابرند:

$$A + E = M \quad , \quad A + K = M$$

$(A + E = A + K)$ از طرفی، چون در دو طرف این تساوی‌ها، مقدار مساوی A وجود دارد، می‌توانیم این مقدار مساوی را حذف کنیم:

$$\cancel{A} + E = \cancel{A} + K \Rightarrow E = K$$

مثال ۷ **می‌دانیم هر چهارضلعی که زاویه‌هایش برابرند، مستطیل است. ثابت کنید مربع هم نوعی مستطیل است.**

ابتدا فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم:

فرض‌های مسئله: مستطیل زاویه‌های برابر دارد، شکل موردنظر ما مربع است و در هر مربع همهٔ زاویه‌ها 90° هستند.

حکم: مربع نوعی مستطیل است.

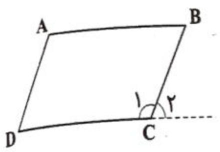
اکنون سعی می‌کنیم از اطلاعاتی که داریم، نتیجه‌گیری را کامل کنیم.

هر چهارضلعی که زاویه‌های آن برابرند، مستطیل است.
در مربع، همهٔ زاویه‌ها 90° هستند، پس با هم برابرند. $\Rightarrow$ پس چون مربع زاویه‌هایش برابرند، نوعی مستطیل است.

تذکر:

طبق آن‌چه گفته شد، گاهی در یک مسئله باید مطالبی را که قبلاً آموخته‌ایم، در کنار اطلاعات مسئله قرار دهیم و به‌عنوان فرض، استفاده کنیم.

مثال ۸ **در متوازی‌الاضلاع مقابل، ثابت کنید $\hat{B}$ و $\hat{C}_2$ با هم برابرند.**



ابتدا فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم:

فرض‌ها: چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، در هر متوازی‌اضلاع، زاویه‌های روبه‌رو برابرند $(\hat{B}=\hat{D}\ ,\ \hat{A}=\hat{C})$، در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های کنار هم، مکمل هستند $(\hat{D}+\hat{C}_1=180^\circ\ ،\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ\ ،\ \hat{B}+\hat{A}=180^\circ\ ،\ \hat{B}+\hat{C}_1=180^\circ)$

حکم: $\hat{B}=\hat{C}_2$

طبق آنچه از فرض مسئله و اطلاعات قبلی خود می‌دانیم، جمع زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}_1$ برابر با 180° است. از طرفی زاویه‌های $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ هم کنار هم، یک زاویهٔ 180° می‌سازند:

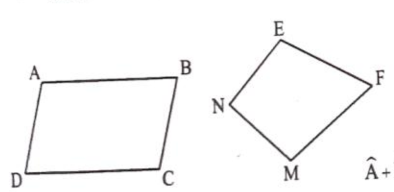
$$\hat{B}+\hat{C}_1=180^\circ \quad , \quad \hat{C}_2+\hat{C}_1=180^\circ$$

مشاهده می کنید که سمت راست هر دو تساوی عدد 180° است. پس نتیجه می‌گیریم که سمت چپ تساوی‌ها هم با هم برابر است. $(\hat{B}+\hat{C}_1=\hat{C}_2+\hat{C}_1)$ و چون در هر دو طرف این تساوی $\hat{C}_1$ وجود دارد، می‌توانیم آن را حذف کنیم:

حکم: $\hat{B}+\cancel{\hat{C}_1}=\hat{C}_2+\cancel{\hat{C}_1}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}_2$

مثال ۹ **ثابت کنید اگر در دو چهارضلعی ABCD و MNEF ، $\hat{A}+\hat{B}=\hat{M}+\hat{N}$ باشد، آن‌گاه $\hat{E}+\hat{F}=\hat{C}+\hat{D}$ است. (در واقع اگر جمع دو زاویه از چهارضلعی اوّل، با جمع دو زاویه از چهارضلعی دوم برابر باشد، آن‌گاه جمع زاویه‌های باقی‌ماندهٔ دو شکل هم با یک‌دیگر برابر است).**

ابتدا یک شکل برای مسئله رسم می کنیم:



حال فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم (قبلاً آموخته‌ایم که جمع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° است):

فرض: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$ و $\hat{M}+\hat{N}+\hat{E}+\hat{F}=360^\circ$ ، هم‌چنین $\hat{A}+\hat{B}=\hat{M}+\hat{N}$

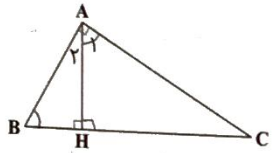
حکم: $\hat{C}+\hat{D}=\hat{E}+\hat{F}$

اکنون به سراغ اثبات می‌رویم. ابتدا طبق فرض مسئله، می‌دانیم جمع زاویه‌های هریک از دو چهارضلعی برابر با 360° است:

$\hat{M}+\hat{N}+\hat{E}+\hat{F}=360^\circ$

چون در سمت راست دو تساوی عدد 360° است، پس نتیجه می‌گیریم که سمت چپ تساوی‌ها برابر است:
(یعنی $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=\hat{M}+\hat{N}+\hat{E}+\hat{F}$) و چون طبق فرض مسئله مقدارهای $\hat{A}+\hat{B}$ و $\hat{M}+\hat{N}$ با هم برابر هستند، می‌توانیم از دو طرف تساوی آن‌ها را حذف کنیم:
$$\cancel{(\hat{A}+\hat{B})}+\hat{C}+\hat{D}=\cancel{(\hat{M}+\hat{N})}+\hat{E}+\hat{F}\Rightarrow \hat{C}+\hat{D}=\hat{E}+\hat{F}$$

مثال ۱۰ در شکل مقابل، ثابت کنید $\hat{B}=\hat{A}_1$ است.



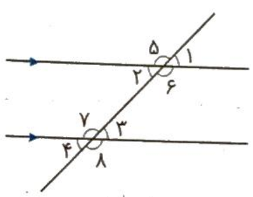
می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، جمع زاویه‌های تند، برابر با 90° است.

فرض: در مثلث بزرگ $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$ و در مثلث AHC هم $\hat{A}_1+\hat{C}=90^\circ$ است.

حکم: $\hat{B}=\hat{A}_1$

چون در سمت راست دو تساوی 90° داریم، پس سمت چپ تساوی‌ها با هم برابر است $(\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{C})$.

در این‌جا می‌توانیم از دو طرف تساوی، زاویه‌های C را خط بزنیم. $\hat{B}+\cancel{\hat{C}}=\hat{A}_1+\cancel{\hat{C}}$ بنابراین: $\hat{B}=\hat{A}_1$.

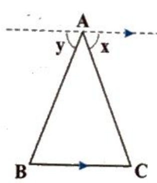


یادآوری: هرگاه دو خطّ موازی، توسط یک خطّ مورب قطع شوند، زاویه‌های تند ایجادشده با هم و زاویه‌های باز ایجادشده نیز با هم برابرند.

زاویه‌های تند $\hat{4}=\hat{3}=\hat{2}=\hat{1}$

زاویه‌های باز $\hat{8}=\hat{7}=\hat{6}=\hat{5}$

مثال ۱۱ در شکل مقابل یک مثلث رسم کرده‌ایم و از رأس A یک خط‌چین، موازی با ضلع BC رسم کرده‌ایم. ثابت کنید جمع زاویه‌های مثلث برابر با 180° است.



ابتدا فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم. در کنار فرض، مطالبی که از قبل آموخته‌ایم را نیز می‌نویسیم:

فرض: خط‌چین موازی BC است. طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{x}=\hat{C}$ و $\hat{y}=\hat{B}$ است.

حکم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

اکنون شروع به اثبات می‌کنیم. در شکل مشخص است که زاویه‌های y ، A و x در کنار هم، یک زاویهٔ نیم‌صفحه (180°) ساخته‌اند.

$$\hat{x}+\hat{A}+\hat{y}=180^\circ$$

با توجه به فرض مسئله، می‌دانیم $\hat{x}=\hat{C}$ و $\hat{y}=\hat{B}$ است. پس می‌توانیم آن‌ها را جایگزین کنیم:

$$\hat{x}+\hat{A}+\hat{y}=180^\circ\Rightarrow\hat{C}+\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$$ حکم اثبات شد.

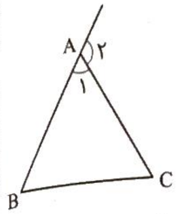
تذکر:
هرگاه به طریق علمی موضوعی را اثبات کردیم (مانند همین مثال قبل که ثابت کردیم جمع زاویه‌های داخل مثلث، همواره 180° است)، می‌توانیم آن را در همهٔ موارد مشابه به‌کار ببریم. یعنی بگوییم در هر مثلثی، جمع زاویه‌های داخلی 180° است. به این کار تعمیم دادن قضیه می‌گویند. یعنی در جاهایی که شرایط یکسان است، می‌توانیم از نتایج قبلی استفاده کنیم.

مثال ۱۲ ثابت کنید در هر مثلث، هر زاویهٔ خارجی با جمع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن (زاویه‌هایی که کنارش قرار ندارند)، برابر است.

این مسئله شکل ندارد و باید خودمان یک شکل برای آن رسم کنیم و زاویه‌های آن را نام‌گذاری کنیم. سپس فرض و حکم مسئله را بنویسیم.

فرض: شکل مثلث است و می‌دانیم $\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ است. همچنین $\hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ$

حکم: $\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2$



اکنون برای شروع اثبات، ابتدا فرض‌های مسئله را می‌نویسیم:

$$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ$$

در هر دو تساوی، سمت راست تساوی برابر با 180° است. پس می‌توان نتیجه گرفت، که سمت چپ تساوی‌ها هم برابر است:

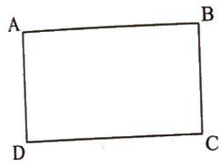
$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_2$$

از طرفی چون در هر دو طرف تساوی، $\hat{A}_1$ وجود دارد، پس می‌توانیم آن‌ها را حذف کنیم:

$$\cancel{\hat{A}_1}+\hat{B}+\hat{C}=\cancel{\hat{A}_1}+\hat{A}_2\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2$$

تذکر: بهتر است تا حدّ امکان در نوشتن حکم و فرض مسئله‌ها، به‌جای عبارت‌های کلامی از علامت‌های ریاضی استفاده کنیم.

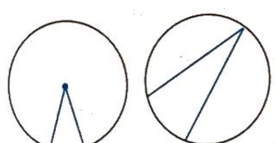
مثلاً اگر در یک مسئله، یک مستطیل مثل شکل مقابل داشته باشیم، با توجه به آن‌چه که در مورد مستطیل می‌دانیم، فرض‌های مسئله به‌صورت زیر خواهند بود.



فرض: زاویه‌های A ، B ، C و D همگی 90° هستند، ضلع‌های AB و CD موازی و مساوی‌اند، ضلع‌های AD و BC مساوی و موازی‌اند.

اما بهتر است. فرض‌ها را به‌صورت زیر بنویسیم:

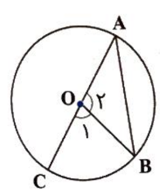
فرض: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^\circ$ ، $AB \parallel DC$ ، $AB=DC$ ، $AD \parallel BC$ و $AD=BC$



زاویهٔ مرکزی　　زاویهٔ محاطی

یادآوری: اگر در یک دایره، رأس زاویه روی مرکز دایره باشد و دو شعاع دایره، ضلع‌های زاویه باشند، به آن زاویهٔ مرکزی می‌گوییم و اگر رأس زاویه، روی محیط دایره باشد و ضلع‌های زاویه، وترهای دایره باشند، به آن زاویهٔ محاطی می‌گوییم.

مثال ۱۴ **می‌دانیم در هر دایره، زاویهٔ مرکزی با کمان روبه‌روی آن برابر است $(\hat{O}_1=\overset{\frown}{BC})$. ثابت کنید که زاویهٔ محاطی A ، نصف کمان روبه‌روی آن، یعنی نصف کمان BC است.**



در شکل، مثلث OAB مثلث متساوی‌الساقین است، زیرا OA و OB شعاع هستند و با هم برابرند. پس در این مثلث زاویه‌های A و B برابرند. همچنین طبق نکته‌ای که در مثال‌های قبل حل کردیم، زاویهٔ خارجی O_1 برابر با جمع $\hat{A}$ و $\hat{B}$ است. اکنون فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم:

فرض: $\hat{O}_1=\overset{\frown}{BC}$ ، $\hat{A}=\hat{B}$ ، $\hat{O}_1=\hat{A}+\hat{B}$

حکم: $\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

برای اثبات، ابتدا طبق فرض می‌نویسیم:

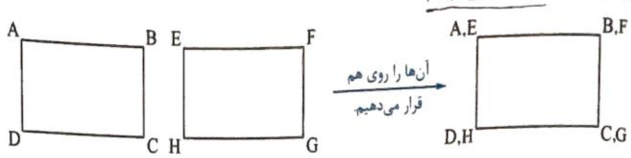
$$\hat{A}+\hat{B}=\hat{O}_1$$

می‌دانیم $\hat{O}_1=\overset{\frown}{BC}$ است و از طرفی $\hat{B}$ با $\hat{A}$ برابر است. پس به‌جای $\hat{O}_1$ ، کمان BC را قرار می‌دهیم و به‌جای $\hat{B}$ هم زاویهٔ A را قرار می‌دهیم:

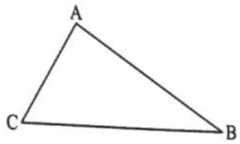
$$\hat{A}+\hat{B}=\hat{O}_1\Rightarrow \hat{A}+\hat{A}=\overset{\frown}{BC}\Rightarrow 2\hat{A}=\overset{\frown}{BC}\Rightarrow \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

شکل‌های هم‌نهشت

قبلاً آموختیم که اگر دو شکل کاملاً مساوی باشند، به‌صورتی‌که اگر آن‌ها را از روی کاغذ برش بزنیم و روی هم قرار دهیم، یک‌دیگر را کاملاً بپوشانند، به آن دو شکل، هم‌نهشت می‌گوییم.



مثلث و اجزای آن



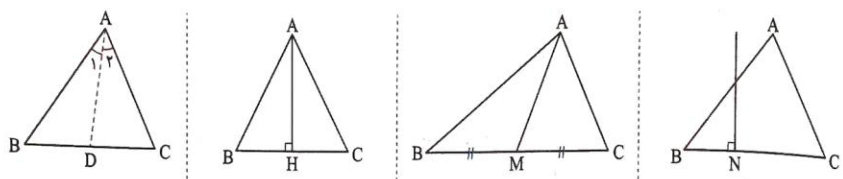
مثلث یک چندضلعی محدب (کوژ) است که دارای سه ضلع و سه رأس (زاویه) می‌باشد. (اجزای اصلی)

ضلع‌ها = AB ، AC ، BC

زاویه‌ها = $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$

همچنان که در مثال‌های قبل ثابت کردیم، در هر مثلث جمع سه زاویه $180°$ است ($\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$).

در یک مثلث، چند پاره‌خط مهم می‌توان رسم کرد. (نیم‌ساز، ارتفاع، میانه و عمودمنصف)



عمودمنصف: از وسط ضلع عمود می‌شود و ممکن است از رأس روبه‌رو عبور کند. (گاهی هم عبور نمی‌کند).

میانه: از رأس به وسط ضلع روبه‌رو وصل می‌شود و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. $BM = CM$

ارتفاع: از رأس به ضلع روبه‌رو عمود می‌شود. (کوتاه‌ترین مسیر از رأس تا ضلع روبه‌رو است).

نیم‌ساز: زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

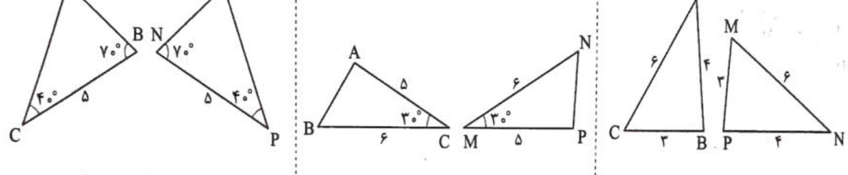
هم‌نهشتی مثلث‌ها

به‌طور کلی، در سه حالت مثلث‌ها با هم، هم‌نهشت می‌شوند.

الف) اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.

ب) اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.

ج) اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی، با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.



$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP}$ (ض ض ض)

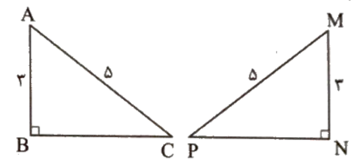
$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP}$ (ض ز ض)

$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP}$ (ز ض ز)

هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

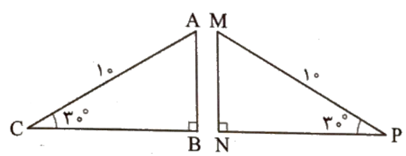
برای هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه، علاوه بر سه روش کلی که در همهٔ مثلث‌ها قابل استفاده است (ض ض ض - ز ض ز - ض ز ض)، دو حالت دیگر هم می‌توان ذکر کرد.

الف) اگر وتر و یک ضلع قائمه از مثلثی با وتر و یک ضلع قائمه از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.



$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP}$ (و - ض)

ب) اگر وتر و یک زاویهٔ تند از مثلثی، با وتر و یک زاویهٔ تند از مثلث دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.



$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MNP}$ (و - ز)

اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها

برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها، مانند هر مسئلهٔ دیگری، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

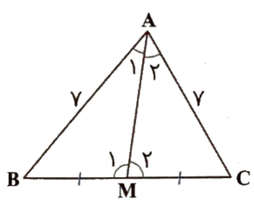
الف) در صورت امکان برای مسئله، یک شکل رسم می‌کنیم.

ب) با توجه به متن سؤال، شکل رسم‌شده و آموخته‌های قبل خود، فرض و حکم مسئله را به‌طور کامل می‌نویسیم.

ج) در نوشتن فرض مسئله، ابتدا سعی می‌کنیم تمام ضلع‌های مساوی دو مثلث را با توجه به اطلاعات مسئله و شکل بنویسیم و سپس زاویه‌های مساوی را مشخص کنیم.

د) با توجه به فرض‌های نوشته‌شده، مشخص می‌کنیم کدام‌یک از حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث اتفاق افتاده است.

هـ) پس از اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها، سایر اجزای مساوی دو مثلث (اجزای متناظر) را می‌نویسیم.



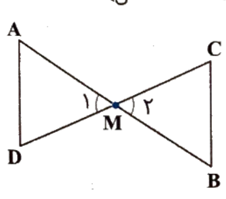
مثال ۱۴ در شکل مقابل، ثابت کنید دو مثلث AMB و AMC هم‌نهشت هستند.

فرض: $AB = AC = ۷$ ، $BM = CM$ و (ضلع مشترک) $AM = AM$

حکم: $\overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACM}$

با توجه به فرض‌هایی که نوشتیم، مشاهده می‌کنید هر سه ضلع از مثلث AMB با هر سه ضلع از مثلث AMC برابرند (حالت سه ضلع روی داده است). پس از نوشتن اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها، اجزای متناظر را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} AM = AM \text{ (ضلع مشترک)} \\ AB = AC = ۷ \\ BM = CM \text{ (اطلاعات شکل)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(ض ض ض)}}{\overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACM}} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right.$$



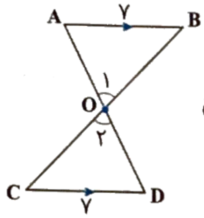
مثال ۱۵ در شکل مقابل، M وسط AB و CD است. ثابت کنید دو مثلث هم‌نهشت هستند.

فرض: $AM = MB$ ، $CM = DM$ ، (متقابل به رأس) $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$

حکم: $\overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{CMB}$

با توجه به فرض‌های نوشته‌شده، می‌توان فهمید که حالت دو ضلع و زاویهٔ بین روی داده است:

$$\left.\begin{array}{l} AM = MB \text{ (فرض مسئله)} \\ DM = MC \text{ (فرض مسئله)} \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \text{ (متقابل به رأس)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(ض ز ض)}}{\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{MCB}} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{D} = \hat{C} \\ AD = BC \end{array}\right.$$



مثال ۱۶ در شکل مقابل، $AB \parallel CD$ است. ثابت کنید دو مثلث هم‌نهشت هستند.

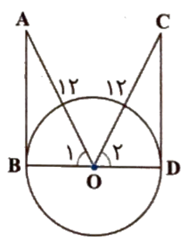
با توجه به قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:

فرض: $AB = CD$ ، (خطوط موازی و مورب) $\hat{A} = \hat{D}$ ، (خطوط موازی و مورب) $\hat{B} = \hat{C}$ ، (متقابل به رأس) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

حکم: $A\overset{\Delta}{B}O \cong O\overset{\Delta}{C}D$

چون فقط یک ضلع مساوی داریم، پس باید به سراغ حالت دو زاویه و ضلع بین برویم. بنابراین باید از زاویه‌های دو طرف ضلع‌ها استفاده کنیم (یعنی $\hat{A}$ و $\hat{B}$). زاویه‌های O_1 و O_2 در اثبات استفاده نمی‌شوند:

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD = 7 \ \text{(اطلاعات شکل)} \\ \hat{A} = \hat{D} \ \text{(خطوط موازی و مورب)} \\ \hat{B} = \hat{C} \ \text{(خطوط موازی و مورب)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(ز ض ز)}}{A\overset{\Delta}{O}B \cong O\overset{\Delta}{C}D} \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ AO = OD \\ BO = OC \end{array}\right.$$



مثال ۱۷ ثابت کنید دو مثلث مقابل، هم‌نهشت هستند. (AB و CD مماس بر دایره می‌باشند).

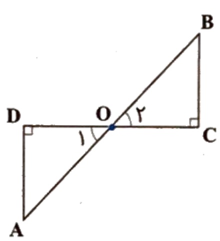
می‌دانیم خطّ مماس و شعاع بر هم عمودند. پس دو مثلث قائم‌الزاویه هستند $(\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ)$.

فرض: $OC = OA$ ، (شعاع) $OB = OD$

حکم: $A\overset{\Delta}{B}O \cong O\overset{\Delta}{C}D$

با توجه به این‌که دو مثلث قائم‌الزاویه هستند و وتر و یکی از ضلع‌های قائمهٔ آن‌ها برابر است، پس طبق حالت وتر و یک ضلع، دو مثلث هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} AO = OC = 12 \\ BO = OD \ \text{(شعاع)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(و - ض)}}{A\overset{\Delta}{O}B \cong C\overset{\Delta}{O}D} \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} AB = CD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{A} = \hat{C} \end{array}\right.$$



مثال ۱۸ در شکل زیر، O وسط AB است. ثابت کنید دو مثلث، هم‌نهشت هستند.

فرض: $AO = OB$ ،(متقابل به رأس) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

حکم: $A\overset{\Delta}{O}D \cong B\overset{\Delta}{O}C$

چون دو مثلث قائم‌الزاویه هستند و وترها و یک زاویهٔ تندشان برابر است، پس به حالت (و - ز) دو مثلث هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} AO = OB \ \text{((فرض مسئله (وتر))} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{(متقابل به رأس)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(و - ز)}}{A\overset{\Delta}{O}D \cong B\overset{\Delta}{O}C} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} \\ DO = OC \\ AD = BC \end{array}\right.$$

قضیهٔ هندسی

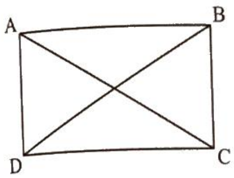
شما تاکنون نکات زیادی را در هندسه آموخته‌اید. مثلاً این نکته که «در هر مثلث، جمع زاویه‌های داخلی برابر با 180° است.» به این نکات که به روش‌های منطقی و با استدلال آن‌ها را ثابت می‌کنیم، قضیهٔ هندسی می‌گویند.

اثبات قضیه‌های هندسی

برای اثبات قضیه‌های هندسی، روش‌های مختلفی وجود دارد، اما در همهٔ این روش‌ها، از استدلال کمک می‌گیریم. بسیاری از قضیه‌های هندسی، با کمک هم‌نهشتی مثلث‌ها اثبات می‌شوند. در اینجا چندین نمونه از آن‌ها را می‌آوریم.

تذکر: قبل از شروع به هر مثال، باید نکاتی که قبلاً گفته شد (مثل رسم شکل، نوشتن فرض و حکم و ...) رعایت شود.

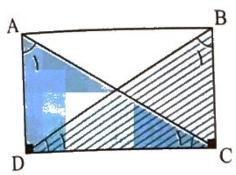
مثال ۱۹ ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها برابرند.



ابتدا یک شکل رسم می‌کنیم. دقت کنید ما می‌خواهیم ثابت کنیم AC و BD (قطرهای مستطیل) برابرند.

در این موارد باید دو مثلث پیدا کنیم که یکی از آن‌ها دارای ضلع AC و دیگری دارای ضلع BD باشد.

آن‌گاه با اثبات هم‌نهشتی دو مثلث، ثابت می‌کنیم این دو پاره‌خط هم برابرند.



ما در این‌جا دو مثلث ADC و BDC را انتخاب می‌کنیم. اکنون با توجه به مستطیل بودن شکل، فرض‌هایی که به‌کار می‌آیند را می‌نویسیم. (این فرض‌ها باید مربوط به دو مثلث ADC و BDC باشند):

فرض: (عرض مستطیل) $AD = BC$ ، (ضلع مشترک) $DC = DC$ ، $\hat{D} = \hat{C} = 90°$

حکم: $AC = BD$

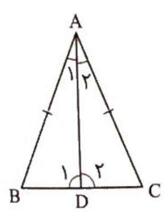
اثبات: با توجه به فرض‌هایی که نوشتیم، مشاهده می‌کنیم که دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \ \text{(عرض مستطیل)} \\ \hat{D} = \hat{C} = 90° \\ DC = DC \ \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(ض ز ض)}}{\overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BCD}} \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} AC = BD \ \text{(حکم مسئله)} \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \end{array}\right.$$

تذکر:

شاید بپرسید چرا با این‌که دو مثلث ADC و BDC قائم‌الزاویه هستند، برای اثبات هم‌نهشتی به سراغ حالت‌های وتر و یک ضلع یا وتر و یک زاویهٔ تند نرفتیم. دلیل این موضوع این است که ما می‌خواهیم ثابت کنیم BD = AC است، یعنی در واقع می‌خواهیم مساوی بودن وترها را ثابت کنیم، پس امکان استفاده از این حالت‌ها نیست.

مثال ۲۰ در یک مثلث متساوی‌الساقین، نیم‌ساز زاویهٔ رأس را رسم می‌کنیم. ثابت کنید این نیم‌ساز، ارتفاع و میانه هم هست.



ابتدا شکل را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم AD میانه است، یعنی BD = DC و نیز AD ارتفاع است، یعنی $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90°$. ابتدا دو مثلث مورد نظر را انتخاب می‌کنیم ($\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$). اکنون فرض‌های مورد نیاز در این دو مثلث را می‌نویسیم:

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، $AB = AC$ ، (ضلع مشترک) $AD = AD$

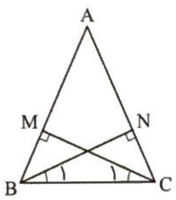
حکم: $BD = DC$ ، $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90°$

اثبات: با توجه به فرض‌هایی که نوشته‌ایم، دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین برابرند:

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \ \text{(فرض مسئله)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \ \text{(نیم‌ساز)} \\ AD = AD \ \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(ض ز ض)}}{\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ADC}} \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} B = C \\ BD = DC \ \text{(حکم مسئله)} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \ \text{(حکم مسئله)} \end{array}\right.$$

از آن‌جا که جمع دو زاویهٔ D_1 و D_2 برابر با $180°$ است (زاویهٔ نیم‌صفحه)، پس هر کدام $90°$ هستند. $(\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90°)$. یعنی AD بر BC عمود شده و ارتفاع مثلث است.

مثال ۲۱ **ثابت کنید ارتفاع‌های وارد بر ساق‌های یک مثلث متساوی‌الساقین، با هم برابرند.**



ابتدا یک مثلث متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم و ارتفاع‌های وارد بر دو ساق را می‌کشیم. در این مسئله می‌خواهیم ثابت کنیم MC و BN با هم برابرند. پس ابتدا باید دو مثلث پیدا کنیم که MC و BN ضلع‌های آن‌ها باشند و سپس شروع به اثبات کنیم. ما در اینجا، دو مثلث MBC و NBC را انتخاب می‌کنیم. این دو مثلث قائم‌الزاویه هستند و وتر هردوی آن‌ها BC است.

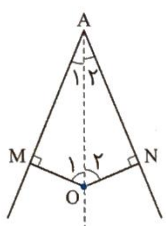
فرض: (مثلث متساوی‌الساقین است) $\hat{B} = \hat{C}$ ، $BC = BC$. (دقت کنید چون ضلع‌های $AC = AB$ در این دو مثلث به کار ما نمی‌آیند، پس در فرض مسئله آن‌ها را نمی‌نویسیم).

حکم: $BN = MC$

اثبات: از آن‌جا که دو مثلث قائم‌الزاویه هستند، با توجه به فرض‌ها، به حالت وتر و یک زاویه با هم هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} BC = BC \ \text{(وتر مشترک)} \\ \hat{B} = \hat{C} \ \text{(زاویهٔ پایین ساق)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(و - ز)}}{M\overset{\Delta}{B}C \cong N\overset{\Delta}{B}C} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} BM = NC \\ BN = MC \ \text{(حکم مسئله)} \\ \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \end{array}\right.$$

مثال ۲۲ **ثابت کنید فاصلهٔ هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.**



ابتدا یادآوری می‌کنیم که منظور از فاصلهٔ یک نقطه تا یک ضلع، عمودی است که از نقطه تا ضلع رسم می‌شود. حال یک زاویه و نیم‌ساز آن را رسم می‌کنیم. یک نقطهٔ دلخواه مثل O روی آن انتخاب می‌کنیم و فاصلهٔ آن را تا دو ضلع مثلث رسم می‌کنیم (ON و OM). باید ثابت کنیم این دو پاره‌خط مساوی‌اند. دو مثلث انتخاب می‌کنیم که این دو پاره‌خط در آن‌ها باشند. ($O\overset{\Delta}{A}N$ و $O\overset{\Delta}{A}M$).

فرض: (نیم‌ساز) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، (ضلع مشترک) $AO = AO$.

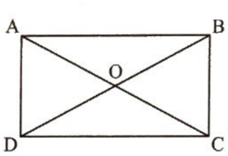
حکم: $ON = OM$

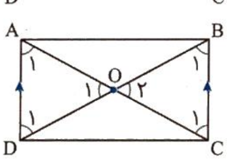
اثبات: مشاهده می‌کنید دو مثلث انتخاب‌شده قائم‌الزاویه هستند و وتر آن‌ها (AO) مشترک است و نیز زاویه‌های تند A_1 و A_2 در آن‌ها مساوی است. پس دو مثلث به حالت وتر و یک زاویه، هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} AO = AO \ \text{(ضلع مشترک)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \ \text{(نیم‌ساز)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(و - ز)}}{A\overset{\Delta}{O}M \cong A\overset{\Delta}{O}N} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} OM = ON \ \text{(حکم مسئله)} \\ AM = AN \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right.$$

مشاهده می‌کنید که OA ، نیم‌ساز زاویهٔ O هم هست.

مثال ۲۳ **ثابت کنید در یک مستطیل، قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند.**





ابتدا یک مستطیل و قطرهای آن را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم $OB = OD$ و $OA = OC$ است. برای این کار دو مثلث انتخاب می‌کنیم که این پاره‌خط‌ها درون آن‌ها قرار داشته باشند. ما در اینجا دو مثلث AOD و OBC را انتخاب می‌کنیم. می‌دانیم مستطیل، نوعی متوازی‌الاضلاع است و ضلع‌های آن دوبه‌دو موازی و مساوی هستند. فرض‌هایی که به این دو مثلث مربوط می‌شوند را می‌نویسیم:

فرض: (عرض مستطیل) $AD = BC$ ، $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ ، $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ (خطوط موازی و مورب)

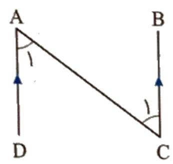
حکم: $AO = OC$ و $BO = OD$

اثبات: دو مثلث AOD و BOC به حالت دو زاویه و ضلع بین مساوی‌اند:

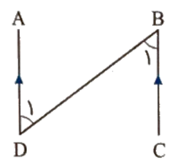
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (خطوط موازی و مورب)
$AD = BC$ (عرض مستطیل)
$\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ (خطوط موازی و مورب)

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{AOD} \underset{(\text{ز ض ز})}{\cong} \overset{\Delta}{OBC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OD = OB \\ OA = OC \end{cases}$$ (حکم مسئله)

شاید دلیل مساوی بودن $\hat{A}_1$ و $\hat{C}_1$ و نیز مساوی بودن $\hat{B}_1$ و $\hat{D}_1$ را با دیدن شکل‌های زیر، بهتر درک کنید.



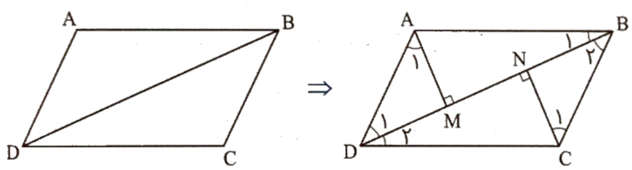
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$



$\hat{D}_1 = \hat{B}_1$

مثال ۲۴ ثابت کنید در یک متوازی‌الاضلاع، فاصلهٔ دو رأس مقابل به هم، تا قطر برابر است.

شاید صورت این سؤال کمی سخت باشد! اما با طی مراحلی که در مسئله‌های قبل انجام دادیم، این مسئله هم حل می‌شود. ابتدا یک متوازی‌الاضلاع و قطر آن را رسم می‌کنیم. می‌دانیم برای رسم فاصلهٔ رأس‌ها تا قطر، باید از رأس بر قطر عمود کنیم. (در این سؤال باید برای دو رأس روبه‌روی هم، این کار را انجام دهیم).

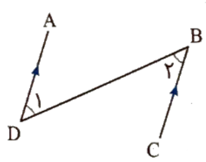


می‌خواهیم ثابت کنیم فاصله‌های رسم‌شده (CN و AM) برابرند. برای این کار باید دو مثلث که این پاره‌خط‌ها در آن‌ها وجود دارند، انتخاب کنیم. این دو مثلث می‌توانند AMD و BNC باشند:

در این مثلث‌های قائم‌الزاویه، $\hat{D}_1$ و $\hat{B}_2$ با توجه به قضیهٔ خطوط موازی و مورب برابرند.

فرض: (ضلع‌های روبه‌روی متوازی‌الاضلاع) $BC = AD$ ، (خطوط موازی و مورب) $\hat{B}_2 = \hat{D}_1$

حکم: $CN = AM$



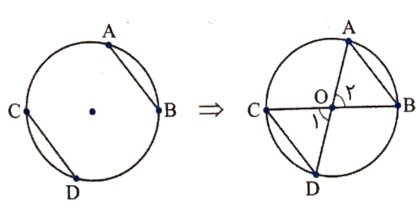
اثبات: در دو مثلث قائم‌الزاویه، وترها و یک زاویهٔ تند برابرند:

$AD = BC$ (ضلع‌های روبه‌روی متوازی‌الاضلاع)
$\hat{D}_1 = \hat{B}_2$ (خطوط موازی و مورب)

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ADM} \underset{(\text{و - ز})}{\cong} \overset{\Delta}{BCN} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{A}_1 \\ NB = DM \\ AM = NC \end{cases}$$ (حکم مسئله)

مثال ۲۵ ثابت کنید اگر در یک دایره دو کمان مساوی باشند، وترهای آن‌ها نیز مساوی‌اند.

ابتدا یک دایره رسم می‌کنیم و روی آن دو کمان مساوی جدا می‌کنیم و وترهای آن دو کمان را ترسیم می‌کنیم. اکنون کافی است، از دو سر کمان‌ها، به مرکز دایره وصل کنیم. می‌دانیم زاویه‌های مرکزی در دایره، برابر با کمان‌های روبه‌روی آن‌ها هستند.



پس $\hat{O}_2 = \overset{\frown}{AB}$ و $\hat{O}_1 = \overset{\frown}{CD}$ و چون این دو کمان مساوی‌اند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ است.

کافی است هم‌نهشتی دو مثلث OAB و OCD که در آن‌ها AB و CD وجود دارند را ثابت کنیم:

فرض: (روبه‌روی کمان‌های مساوی) $\hat{O}_2 = \hat{O}_1$ ، (شعاع) $OD = OC = OB = OA$

حکم: $CD = AB$

اثبات: با توجه به فرض مسئله، این دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین، با هم هم‌نهشت هستند:

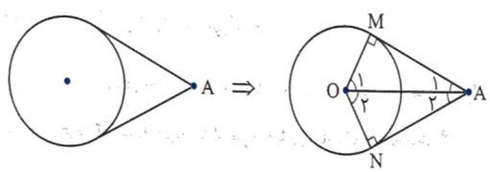
$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \ \text{(شعاع دایره)} \\ OB = OD \ \text{(شعاع دایره)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{(روبه‌روی کمان‌های مساوی)} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \underset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{OCD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \\ AB = CD \ \text{(حکم مسئله)} \end{array}\right.$$

مثال ۲۶ ثابت کنید، اگر از یک نقطه، دو مماس بر دایره رسم کنیم، طول آن دو مماس با هم برابر است.

ابتدا از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. می‌دانیم مماس بر شعاع عمود است. از مرکز دایره به محل‌های تماس و نیز به نقطهٔ O وصل می‌کنیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم که AM و AN برابرند. دو مثلث انتخاب می‌کنیم که این دو پاره‌خط درون آن‌ها وجود داشته باشد ($\overset{\Delta}{AON}$ و $\overset{\Delta}{AOM}$).

با ثابت کردن هم‌نهشتی آن‌ها، حکم مسئله نیز ثابت می‌شود. در این دو مثلث قائم‌الزاویه، OA وتر مشترک است:



فرض: (وتر مشترک) $OA = OA$ ، (شعاع‌های دایره) $OM = ON$

حکم: $AM = AN$

اثبات: در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM و OAN ، وترها مساوی است و ضلع‌های قائمهٔ ON و OM نیز مساوی‌اند. پس دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت هستند:

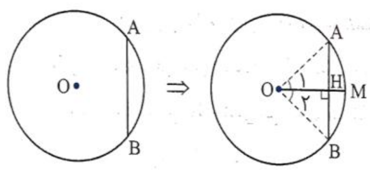
$$\left.\begin{array}{l} OA = OA \ \text{(وتر مشترک)} \\ OM = ON \ \text{(شعاع)} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAM} \underset{\text{(و - ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{OAN} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AN \ \text{(حکم مسئله)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right.$$

مشاهده می‌کنید که OA ، نیم‌ساز زاویه‌های A و O هم هست.

مثال ۲۷ ثابت کنید اگر از مرکز دایره بر یک وتر عمود کنیم، وتر و کمان آن نصف می‌شوند.

ابتدا یک دایره رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم $BH = AH$ و $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{AM}$ است.

ابتدا دو مثلث پیدا می‌کنیم که پاره‌خط‌های AH و BH در آن‌ها وجود داشته باشند.



این دو مثلث OAH و OBH هستند:

فرض: (شعاع) $OB = OA$ ، (ضلع مشترک) $OH = OH$

حکم: $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{AM}$ ، $AH = HB$

اثبات: دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH و OBH به حالت وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت هستند:

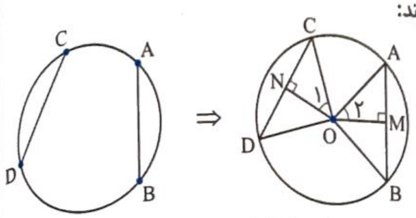
$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \ \text{(شعاع، وتر)} \\ OH = OH \ \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAH} \underset{\text{(و - ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{OBH} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} AH = BH \ \text{(حکم مسئله)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right.$$

چون زاویه‌های مرکزی O_1 و O_2 مساوی‌اند، پس کمان‌های روبه‌روی آن‌ها، یعنی $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{BM}$ هم مساوی‌اند.

مثال ۲۸ ثابت کنید اگر در دایره‌ای، دو وتر مساوی باشند، فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره برابر است.

ابتدا یک دایره رسم می‌کنیم. می‌دانیم فاصلهٔ مرکز تا وتر، برابر با عمودی است که از مرکز دایره به وتر وصل می‌شود.

می‌خواهیم ثابت کنیم OM و ON برابرند. باید دو مثلث که این دو پاره‌خط در آن‌ها وجود دارند پیدا کنیم. این دو مثلث می‌توانند OAM و OCN باشند. دقت کنید طبق آن‌چه در مثال قبل آموختیم، هرگاه از مرکز بر یک وتر عمود کنیم، آن را نصف می‌کند. پس $AM = MB$ و $CN = ND$ و چون



طبق صورت سؤال، AB و CD برابرند، پس نصف آن‌ها، یعنی AM و CN هم برابرند:

فرض: $CN = AM$ ، $OC = OA$ (شعاع)

حکم: $ON = OM$

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM و OCN ، وترهای OA و OC با هم برابرند

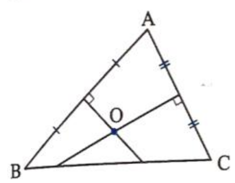
و ضلع‌های AM و CN نیز با هم برابرند:

$$\left.\begin{matrix} OC = OA \ (\text{شعاع – وتر}) \\ CN = AM \ (\text{فرض مسئله}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{و – ض})}{A\overset{\Delta}{O}M \cong O\overset{\Delta}{C}N} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{matrix} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ ON = OM \ (\text{حکم مسئله}) \end{matrix}\right.$$

مسائل کاربردی

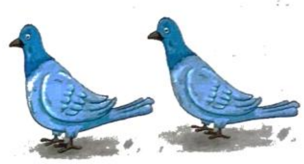
مسائل هندسه در زندگی روزمرهٔ انسان‌ها نقش مهمی دارند. در اینجا قصد ورود به کاربردهای هندسه در مسائل روزانه را نداریم، اما برای نمونه، مثالی از آن‌ها را حل می‌کنیم.

مثال ۲۹ روی نقشه، سه شهر A ، B و C ، به‌صورت مقابل قرار دارند. چگونه نقطه‌ای را برای احداث فرودگاه پیدا کنیم که از هر سه شهر، به یک فاصله باشد؟



اگر این سه نقطه را به‌هم وصل کنیم، یک مثلث ایجاد می‌شود. می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. در اینجا عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و AC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ O چون روی عمودمنصف AB است. پس از A و B به یک فاصله است. همچنین نقطهٔ O چون روی عمودمنصف AC است، پس از A و C به یک فاصله است. در نتیجه، نقطهٔ O ، از A و B ، C به یک فاصله است.

تشابه



ما انسان‌ها، در زندگی روزمرهٔ خود، از کلمهٔ شبیه یا مشابه زیاد استفاده می‌کنیم. حتماً بسیاری از ما ممکن است با دیدن این دو شکل، بگوییم شبیه به هم هستند.

اما در هندسه، فقط در شرایط خاصی می‌گوییم دو شکل متشابه هستند. برای درک درست این موضوع به سه تصویر زیر نگاه کنید.

(۱) (۲) (۳)

مشاهده می‌کنید که تصویرهای شمارهٔ (۲) و (۳) همان تصویر شمارهٔ (۱) هستند که کمی به هم ریخته شده اند! شاید در گفتگوهای معمول افراد، این سه تصویر را شبیه به هم گویند، اما از نظر هندسه این تصویرها متشابه نیستند، زیرا تصاویر (۲) و (۳) نسبت به تصویر یک به هم ریخته هستند. شکل شمارهٔ (۲) فقط در طول کشیده شده است و شکل شمارهٔ (۳) فقط در عرض کشیده شده است.

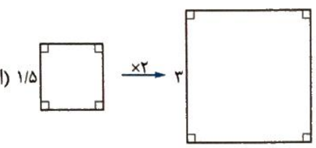
تشابه شکل‌ها در هندسه

در هندسه به دو شکل متشابه می‌گوییم، هرگاه شکل اوّل را در همهٔ جهت‌ها به یک نسبت کوچک یا بزرگ کنیم. به‌عنوان مثال تصویر سمت راست، متشابه تصویر سمت چپ است.

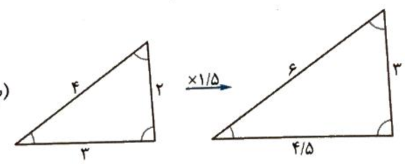
ویژگی‌های شکل‌های متشابه

همان‌طور که گفتیم، در هندسه اگر شکلی را در همهٔ جهات با یک نسبت بزرگ یا کوچک کنیم، شکل جدید متشابه شکل اوّل خواهد بود. در این حالت، همهٔ ضلع‌ها با یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌شوند، اما زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند. یعنی زاویه‌های دو شکل همواره یکسان است. در زیر چند جفت شکل متشابه را رسم کرده‌ایم.

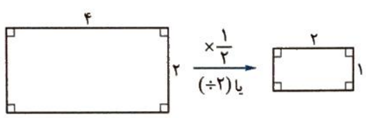
الف)



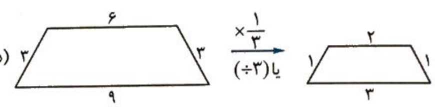
ب)



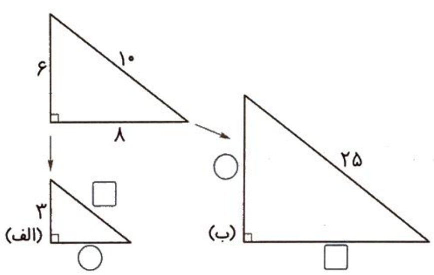
ج)



د)

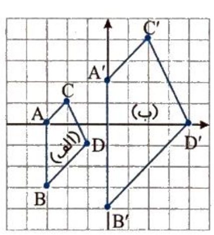


مثال ۳۰: روی هر کدام از شکل‌ها، به‌جای □ و ○ عدد مناسب قرار دهید تا با شکل بالایی متشابه باشند.



در شکل (الف)، ابعاد شکل اصلی را نصف کرده‌ایم، پس $\square = 10 \div 2 = 5$ و $\bigcirc = 8 \div 2 = 4$ است. در شکل (ب) ابعاد شکل اصلی را ۲/۵ برابر کرده‌ایم، پس $\square = 8 \times 2/5 = 20$ و $\bigcirc = 6 \times 2/5 = 15$ است.

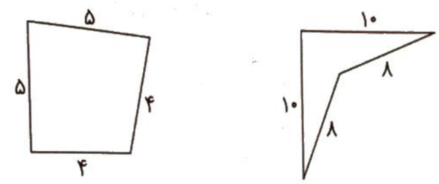
مثال ۳۱: مختصات رأس‌های شکل (الف) به‌صورت $D = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$ است. شکل (ب) با شکل (الف) متشابه است. اگر مختصات دو رأس آن $B' = \begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$ و $A' = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ باشد، مختصات رئوس C' و D' را به‌دست آورید.



با رسم شکل (الف) و نیز رسم پاره‌خط $A'B'$ از شکل (ب)، مشاهده می‌کنید که اضلاع شکل (ب)، ۲ برابر شکل (الف) هستند و به این صورت مختصات نقاط C' و D' را می‌توان به‌دست آورد:

$$C' = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} ، D' = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$

مثال ۳۲ **در زیر، دو چهارضلعی داریم که اندازهٔ اضلاع شکل (ب)، دو برابر اندازهٔ اضلاع شکل (الف) هستند. آیا این دو شکل متشابه هستند؟**

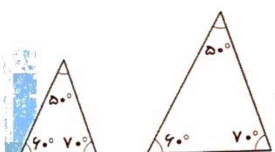


(الف) (ب)

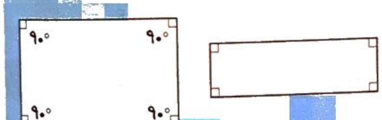
خیر. در تعریف شکل‌های هندسی متشابه، گفتیم که اضلاع باید با یک نسبت بزرگ یا کوچک شوند و زاویه‌های متناظر تغییر نکنند. در شکل (ب) زاویه‌ها با شکل (الف) کاملاً متفاوت است.

نکته

مثلث‌ها تنها شکل‌هایی هستند که اگر زاویه‌های آن‌ها دوبه‌دو (نظیر به نظیر) با هم برابر باشد، متشابه هستند. اما در سایر شکل‌ها (چهارضلعی‌ها، پنج‌ضلعی‌ها و ...) ممکن است زاویه‌ها مساوی باشند اما شکل‌ها متشابه نباشند، یعنی در سایر شکل‌ها هر دو شرط تشابه باید وجود داشته باشد (هم زاویه‌های نظیر به نظیر برابر باشند و هم ضلع‌ها با یک نسبت بزرگ یا کوچک شده باشند).

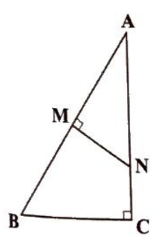


⇐ حتماً دو مثلث متشابه هستند

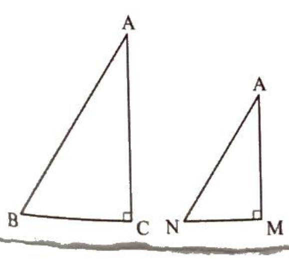


⇐ با این‌که زاویه‌ها مساوی‌اند، اما شکل‌ها متشابه نیستند، زیرا ضلع‌ها با یک نسبت تغییر نکرده‌اند.

مثال ۳۳ **اگر بدانیم در شکل مقابل، دو مثلث کوچک و بزرگ متشابه هستند، نام زاویه‌های متناظر را در هر دو شکل بنویسید.**



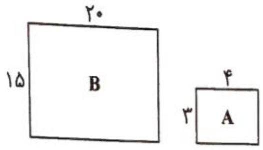
می‌دانیم در شکل‌های متشابه، زاویه‌های متناظر با هم برابرند. در این دو مثلث (ABC و AMN) زاویهٔ A در هر دو مثلث وجود دارد. از طرفی زاویه‌های M و C در هر دو مثلث °۹۰ هستند و با هم مساوی‌اند، پس زاویه‌های N و B باید با هم مساوی باشند. برای درک بهتر، می‌توانید شکل دو مثلث را جداگانه و به‌صورت مقابل در نظر بگیرید.



نسبت تشابه

در تعریف دو شکل متشابه، گفتیم که زاویه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر است و اضلاع آن‌ها با یک نسبت مساوی بزرگ یا کوچک شده‌اند، به این نسبت، نسبت تشابه می گویند.

مثال ۳۴ **در شکل‌های مقابل، نسبت تشابه مستطیل B به مستطیل A چند است؟**

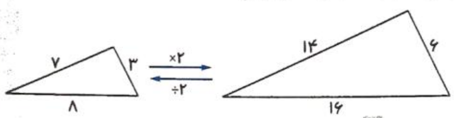


چون اضلاع مستطیل B، ۵ برابر اضلاع مستطیل A هستند، پس نسبت تشابه B به A، ۵ است.

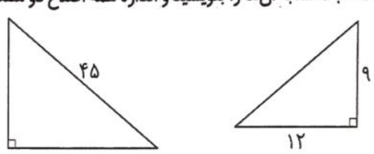
تذکر:

برای دو شکل متشابه می‌توان نسبت تشابه را به دو صورت بیان کرد (نسبت شکل کوچک به بزرگ) یا (نسبت شکل بزرگ به کوچک). مثلاً در شکل‌های متشابه زیر، اگر نسبت تشابه شکل کوچک به بزرگ را بخواهیم، چون ضلع‌های شکل کوچک نصف اضلاع مثلث بزرگ هستند، نسبت تشابه را $\frac{۱}{۲}$ می‌گوییم ولی اگر نسبت تشابه مثلث بزرگ به کوچک را بخواهیم، چون اضلاع این مثلث، ۲ برابر مثلث کوچک هستند، پس نسبت تشابه را ۲ می‌گوییم.

مشاهده می‌کنید که نسبت تشابه شکل کوچک به بزرگ ($\frac{۱}{۲}$)، معکوس نسبت تشابه شکل بزرگ به کوچک است (۲).



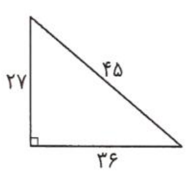
مثال ۳۵ **دو مثلث زیر، متشابه هستند. نسبت تشابه آن‌ها را بنویسید و اندازهٔ همهٔ اضلاع دو مثلث را محاسبه کنید.**



(الف) (ب)

ابتدا از رابطهٔ فیثاغورس، وتر مثلث (ب) را محاسبه می‌کنیم:

$$x^{۲}=۱۲^{۲}+۹^{۲}=۱۴۴+۸۱=۲۲۵\Rightarrow x=۱۵$$



مشاهده می‌کنید وتر مثلث (ب)، ۱۵ است و وتر مثلث (الف)، ۴۵ است. پس اضلاع مثلث (الف)، سه‌برابر اضلاع مثلث (ب) هستند، یعنی نسبت تشابه (الف) به (ب)، ۳ است.

نوشتن نسبت اضلاع

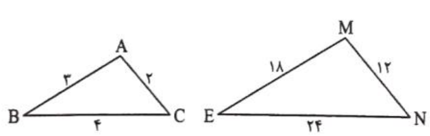
همان‌طور که می‌دانید، در دو شکل متشابه، اضلاع با یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌شوند (نسبت تشابه). بنابراین در هر دو شکل متشابه، نسبت یک ضلع به ضلع متناظر آن برابر با نسبت تشابه دو شکل است. مثلاً در شکل‌های زیر، دو مثلث متشابه رسم کرده‌ایم که نسبت تشابه آن‌ها ۶ است.

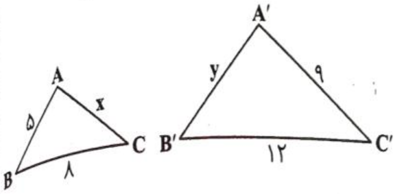
اگر نسبت هر ضلع به ضلع متناظر آن را بنویسیم، حاصل برابر با همان نسبت تشابه است:

$$\frac{ME}{AB}=\frac{۱۸}{۳}=۶ \quad،\quad \frac{MN}{AC}=\frac{۱۲}{۲}=۶ \quad،\quad \frac{EN}{BC}=\frac{۲۴}{۴}=۶$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$\frac{ME}{AB}=\frac{MN}{AC}=\frac{EN}{BC}=۶$$





مثال ۳۶ **در شکل‌های مقابل، دو مثلث متشابه هستند. مقدار x و y را با نوشتن نسبت‌های تشابه اضلاع به‌دست آورید.**

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow\frac{۵}{y}=\frac{x}{۹}=\frac{۸}{۱۲}$$

با استفاده از نسبت $\frac{۸}{۱۲}$ و قانون طرفین وسطین، هریک از مقدارهای x و y را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{۹}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow x\times ۱۲=۹\times ۸\Rightarrow x=\frac{۹\times ۸}{۱۲}=۶$$

$$\frac{۵}{y}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow ۵\times ۱۲=y\times ۸\Rightarrow y=\frac{۵\times ۱۲}{۸}=۷/۵$$

مثال ۳۷ **دو چهارضلعی متشابه داریم که اضلاع اوّلی ۲۴، ۱۸، ۳۶ و ۴۸ و اضلاع متناظر آن‌ها در شکل دوم به‌ترتیب ۲x+۲، ۲۴، ۵y-۲ و ۱۲z+۴ هستند. مقدار x، y و z را پیدا کنید.**

طبق آن‌چه گفته شد، در دو شکل متشابه، نسبت اضلاع متناظر با یک‌دیگر برابر است. پس:

$$\frac{۲x+۲}{۲۴}=\frac{۲۴}{۱۸}=\frac{۵y-۲}{۳۶}=\frac{۱۲z+۴}{۴۸}$$

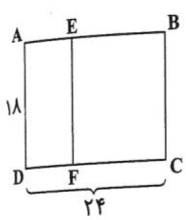
از روی نسبت $\frac{۲۴}{۱۸}$ و به کمک قانون طرفین وسطین، مقدار x، y و z را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۲x+۲}{۲۴}=\frac{۲۴}{۱۸}\Rightarrow ۱۸\times(۲x+۲)=۲۴\times ۲۴\Rightarrow ۳۶x+۳۶=۵۷۶\Rightarrow ۳۶x=۵۴۰\Rightarrow x=۱۵$$

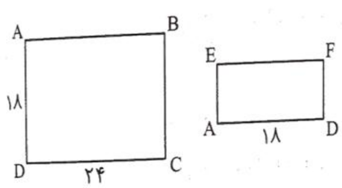
$$\frac{۵y-۲}{۳۶}=\frac{۲۴}{۱۸}\Rightarrow ۱۸\times(۵y-۲)=۲۴\times ۳۶\Rightarrow ۹۰y-۳۶=۸۶۴\Rightarrow ۹۰y=۹۰۰\Rightarrow y=۱۰$$

$$\frac{۱۲z+۴}{۴۸}=\frac{۲۴}{۱۸}\Rightarrow ۱۸\times(۱۲z+۴)=۲۴\times ۴۸\Rightarrow ۲۱۶z+۷۲=۱۱۵۲\Rightarrow ۲۱۶z=۱۰۸۰\Rightarrow z=۵$$

مثال ۳۸ **در شکل مقابل، مستطیل ABCD و مستطیل AEFD متشابه هستند. اندازهٔ AE را به‌دست آورید.**



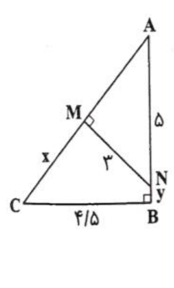
در این سؤالات که شکل‌ها درون هم کشیده شده‌اند، بهتر است که دو شکل را بیرون از هم رسم کنیم تا راحت‌تر مسئله را حل نماییم:



$$\frac{\text{طول اوّلی}}{\text{طول دومی}}=\frac{\text{عرض اوّلی}}{\text{عرض دومی}}\Rightarrow\frac{DC}{AD}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow\frac{۲۴}{۱۸}=\frac{۱۸}{AE}$$

$$\Rightarrow AE\times ۲۴=۱۸\times ۱۸\Rightarrow AE=\frac{۱۸\times ۱۸}{۲۴}=۱۳/۵$$

مثال ۳۹ **در شکل مقابل، دو مثلث کوچک و بزرگ متشابه هستند. اندازهٔ x و y را پیدا کنید.**

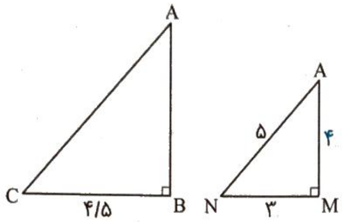


مطابق مثال‌هایی که قبلاً حل کردیم، در اینجا می‌توان فهمید زاویهٔ A در هر دو شکل یکسان است. زاویهٔ B و M در هر دو شکل ۹۰° هستند. پس زاویه‌های N و C با هم برابرند. حال می‌توان دو شکل را جدا از هم در نظر گرفت و با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، می‌توان مقدار AM را به‌دست آورد:

$$۳^۲+AM^۲=۵^۲\Rightarrow ۹+AM^۲=۲۵\Rightarrow AM^۲=۱۶\Rightarrow AM=۴$$

$$\Rightarrow \text{نسبت‌ها}=\frac{AC}{AN}=\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}\Rightarrow\frac{AC}{۵}=\frac{AB}{۴}=\frac{۴/۵}{۳}$$

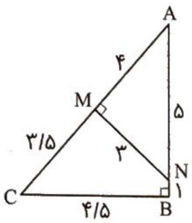
از روی نسبت $\frac{۴/۵}{۳}$ و با کمک طرفین وسطین، می‌توانیم اندازهٔ AB و BC را به‌دست آوردیم:



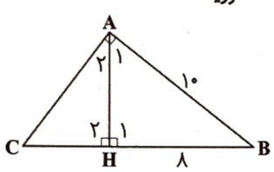
$$\frac{AC}{۵} = \frac{۴/۵}{۳} \Rightarrow AC \times ۳ = ۵ \times ۴/۵ \Rightarrow AC = \frac{۵ \times ۴/۵}{۳} = ۷/۵$$

$$\frac{AB}{۴} = \frac{۴/۵}{۳} \Rightarrow AB \times ۳ = ۴/۵ \times ۴ \Rightarrow AB = \frac{۴/۵ \times ۴}{۳} = ۶$$

اکنون در شکل اصلی می‌توانیم x و y را پیدا کنیم: $(x = ۳/۵ ، y = ۱)$



مثال ۴۰ اگر بدانیم دو مثلث AHB و ACH متشابه هستند، اندازهٔ ضلع‌های HC و AC را به‌دست آورید.

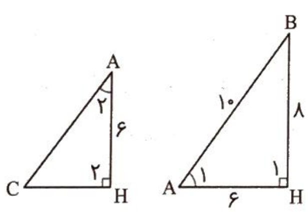


با توجه به استدلال زیر، می‌توان فهمید زاویهٔ C و A_1 نیز برابرند. (دقت کنید در مثلث ABC ، جمع زاویه‌های B و C برابر با ۹۰° است).

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} + \hat{A}_1 = ۹۰^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\hat{B}} + \hat{A}_1 = \cancel{\hat{B}} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$$

پس در دو مثلث ABH و ACH ، زاویه‌های H_1 و H_2 با هم و زاویه‌های C و A_1 هم با هم برابرند. با توجه به فرض مسئله که دو مثلث AHB و ACH متشابه‌اند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت زاویه‌های B و A_2 هم با هم برابرند. اکنون مانند مثال‌های قبل، دو مثلث را جداگانه به‌صورتی رسم می‌کنیم که بتوانیم به‌راحتی اضلاع متناظر را تشخیص دهیم. (با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، می‌توان فهمید $AH = ۶$ است).

$$\text{نسبت‌ها} = \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{AC}{۱۰} = \frac{۶}{۸} = \frac{CH}{۶}$$



از روی نسبت $\frac{۶}{۸}$ و طرفین وسطین، می‌توانیم AC و CH را محاسبه کنیم:

$$\frac{AC}{۱۰} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow AC = \frac{۶ \times ۱۰}{۸} = ۷/۵$$

$$\frac{CH}{۶} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow CH = \frac{۶ \times ۶}{۸} = ۴/۵$$

مقیاس

حتماً شما هم تاکنون با مواردی مثل نقشه یا ماکت یک ساختمان برخورد داشته‌اید. به‌عنوان مثال ما نمی‌توانیم تصویر یک منطقه را روی یک کاغذ با اندازهٔ واقعی رسم کنیم، زیرا در آن صورت نیاز به یک کاغذ هم‌مساحت با آن منطقه داریم!!! بنابراین در این مواقع تصویر آن منطقه (نقشهٔ آن منطقه) را در یک ابعاد کوچک‌تر رسم می‌کنند. در هنگام رسم این نقشه، دقیقاً باید همه‌چیز را با یک نسبت کوچک کنیم تا شکل از نظر هندسی متشابه باشد. به نسبتی که تصویر یک منطقه را کوچک می‌کنیم تا روی یک صفحهٔ کوچک‌تر نقشهٔ آن را رسم کنیم، مقیاس گفته می‌شود (برای ساخت ماکت ساختمان‌ها نیز دقیقاً همین مراحل وجود دارد). پس می‌توان گفت:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{\text{اندازهٔ نقشه}}{\text{اندازهٔ واقعی}}$$ (واحدها باید یکی باشند.)

مثلاً وقتی ما طول جاده‌ای که ۱۴ کیلومتر است را روی نقشه، به‌اندازهٔ ۷ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، مقیاس رسم‌شده برابر است با:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{7}{1400000} = \frac{1}{200000} \qquad (14\,\text{km} = 1400000\,\text{cm})$$

بنابراین وقتی می‌گوییم مقیاس یک نقشه $\frac{1}{200000}$ است، یعنی نسبت مقدار رسم‌شده به مقدار واقعی، مثل ۱ به ۲۰۰۰۰۰ است.

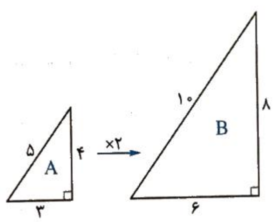
مثال ۴۱ مقیاس یک نقشه، $\frac{1}{500000}$ است. اگر طول یک جاده روی این نقشه ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول واقعی آن چند کیلومتر است؟

$$\text{مقیاس} = \frac{\text{اندازهٔ رسم‌شده}}{\text{اندازهٔ واقعی}} \Rightarrow \frac{1}{500000} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{500000 \times 12}{1} = 6000000\,\text{cm} = 60\,\text{km}$$

تشابه و محیط شکل‌ها

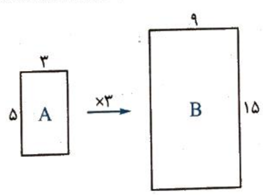
به شکل‌های زیر دقت کنید. در هر قسمت دو شکل متشابه رسم شده و نسبت محیط‌های آن‌ها را نوشته‌ایم.

الف)



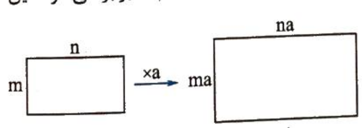
$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط } A = 12 \\ \text{محیط } B = 24 \\ \text{نسبت تشابه} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{24}{12} = 2$$

ب)



$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط } A = 16 \\ \text{محیط } B = 48 \\ \text{نسبت تشابه} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{48}{16} = 3$$

مشاهده می‌کنید که نسبت محیط‌های دو شکل متشابه، با نسبت تشابه آن‌ها یکسان است. علت این موضوع آن است که در تشابه، ما تک‌تک ضلع‌های شکل اوّل را در عددی مثل a ضرب می‌کنیم و چون محیط شکل برابر با جمع ضلع‌ها است، پس محیط هم a برابر می‌شود. این عدد را برای مستطیل مقابل به‌صورت جبری نشان داده‌ایم:



$$\text{محیط} = 2 \times (m+n) \qquad \text{محیط} = 2 \times (ma + na) \xrightarrow{\text{از } a \text{ فاکتور می‌گیریم}} 2 \times a \times (m+n)$$

$$\Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{\cancel{2} \times a \times \cancel{(m+n)}}{\cancel{2} \times \cancel{(m+n)}} = a$$

مثال ۴۲ مثلثی به اضلاع ۵، ۶ و ۹ با مثلثی به محیط ۶۰ سانتی‌متر، متشابه است. کوچک‌ترین ضلع مثلث دوم چه‌قدر است؟

می‌دانیم نسبت تشابه با نسبت محیط‌ها برابر است. محیط مثلث اوّل ۲۰ است:

$$\text{نسبت تشابه} = \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{60}{20} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{\text{کوچک‌ترین ضلع مثلث دوم}}{\text{کوچک‌ترین ضلع مثلث اوّل}} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = \frac{3 \times 5}{1} = 15$$

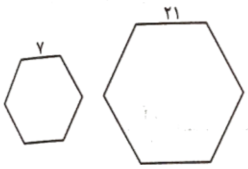
از طرفی چون نسبت تشابه با نسبت محیط‌ها برابر است، پس نسبت محیط‌های دو شکل هم $\frac{۶}{۷}$ است. ما نمی‌دانیم ۴۲۰ محیط شکل بزرگ‌تر است یا شکل کوچک‌تر، پس باید برای هر دو حالت، مسئله را حل کنیم:

$$\frac{\text{محیط کوچک‌تر}}{\text{محیط بزرگ‌تر}}=\frac{۶}{۷}\Rightarrow\frac{\text{محیط کوچک‌تر}}{۴۲۰}=\frac{۶}{۷}\Rightarrow\text{محیط کوچک‌تر}=\frac{۶\times۴۲۰}{۷}=۳۶۰$$

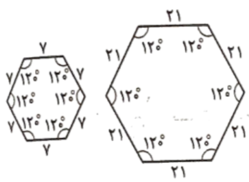
$$\frac{\text{محیط کوچک‌تر}}{\text{محیط بزرگ‌تر}}=\frac{۶}{۷}\Rightarrow\frac{۴۲۰}{\text{محیط بزرگ‌تر}}=\frac{۶}{۷}\Rightarrow\text{محیط بزرگ‌تر}=\frac{۷\times۴۲۰}{۶}=۴۹۰$$

شکل‌های منتظم و متشابه

به دو شش‌ضلعی منتظم مقابل دقت کنید.



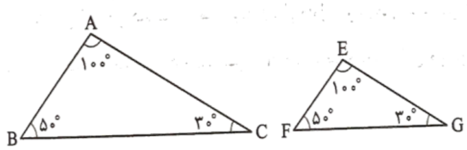
قبلاً گفتیم در دو شکل متشابه، زاویه‌ها مساوی‌اند و همهٔ ضلع‌ها با یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌شوند. از آن‌جا که در هر شش‌ضلعی منتظم، اندازهٔ زاویه‌ها همواره ۱۲۰° است و ضلع‌ها مساوی است، پس دو شکل داده‌شده، در واقع به‌صورت زیر هستند. مشاهده می‌کنید که همهٔ ضلع‌ها ۳ برابر شده‌اند و همهٔ زاویه‌ها مساوی‌اند. پس می‌توان نتیجه گرفت که هر دو شکل منتظم که تعداد ضلع‌هایشان برابر است (مثلاً هر دو ۵ضلعی منتظم یا هر دو ۲۸ضلعی منتظم) همواره با هم متشابه هستند.

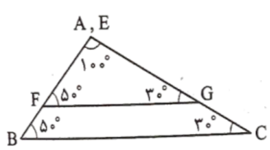


به‌طور کلی، هر دو nضلعی منتظم، همواره با هم متشابه هستند.

موازی بودن ضلع‌های متناظر در شکل‌های متشابه

قبلاً گفتیم در شکل‌های متشابه، زاویه‌ها با هم برابرند. اکنون به شکل زیر دقت کنید. در شکل زیر، دو مثلث ABC و EFG متشابه هستند. پس زاویه‌های آن‌ها برابر است.

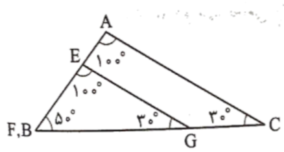




اکنون دو مثلث را طوری روی هم رسم کنیم که زاویه‌های ۱۰۰° آن‌ها روی هم قرار بگیرد.

مشاهده می‌کنید که ضلع مورب AB روی ضلع‌های FG و BC زاویهٔ ۵۰° ساخته است. پس نتیجه می‌گیریم که قاعده‌های دو مثلث، یعنی FG و BC موازی‌اند.

حال دو مثلث را به‌صورتی رسم می‌کنیم که زاویه‌های ۵۰° دو مثلث (یعنی $\hat{B}$ و $\hat{F}$) روی هم قرار گیرد.

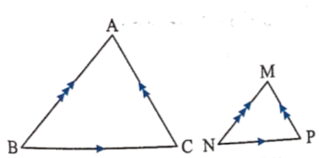


مشاهده می‌کنید که ضلع AB روی ضلع‌های EG و AC زاویه‌های ۱۰۰ درجه ساخته است. پس نتیجه می‌گیریم $AC \parallel EG$ است.

به همین صورت می‌توان ثابت کرد که ضلع‌های AB و EF هم در دو مثلث موازی هستند.

بنابراین می‌توان گفت در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناظر دوبه‌دو موازی‌اند.

مثلاً اگر بدانیم دو مثلث ABC و MNP متشابه هستند، پس:



$AB \parallel MN$ ، $AC \parallel MP$ ، $BC \parallel NP$